非線形確率微分方程式と情報の微分幾何

筑波大物質工　金野秀敏

1。　緒言

最近、情報の微分幾何学の方法と非線形可積分系との関連が議論されている。最近の各分野における応用の進展については文献[1-3]に譲るとして、ここでは、複雑な非平衡系である工学システムの一例としての原子炉の揺らぎ信号の解析を通じて情報の微分幾何や揺動の非可逆循環との関連を考察したのでそれに付いて報告する。「なぜ、情報の微分幾何か？」。工学システム異常診断の観点からすれば揺らぎの周波数スペクトルを観測し、特定の周波数のピークが成長するかどうかを監視すれば事足りるかにみえるが、通常、巨大で複雑な構造を持つシステムでは原因の異なる振動のピーク等が数多く混入し、パワースペクトルの監視のみでは兆候の早期発見は難しい場合が多い。また、カオス解析で用いられているリアプノフ指数や相関次元等の解析の応用も試みられているが、素性の明かでない多く雑音源の存在のため、信頼性に問題がある事が指摘されている。時系列から非線形特性を抽出するには、位相空間におけるリアプノフ・スペクトルの情報と軌道点のつくる多様体の構造の両方を最大限利用する必要があるだろう。

ここでは、軌道点のつくる多様体の構造を１本の時系列データを２次元の位相空間に埋め込み、それから抽出されるポテンシャルから(i)系の非線形構造を推定するとともに、(ii)一般化ｑモーメント、揺動の非可逆循環が原子炉の安定性指標になりうる事、(iii)非線形モデルのパラメータ推定（逆問題）可能性とパラメータが従う力学系の可積分性の関係について述べる。

2。　非線形確率微分方程式

事故や故障により原子炉の発振現象が沸騰水型原子炉で発生したが、研究炉でも発生していた。このような振動現象の発生を早期に発見する信号処理技術は原子炉の安全性にとって重要である。原子炉の内部状態の監視は中性子の揺らぎの時間変化を測定する事により行われる。通常の原子炉の定常運転時には中性子の揺らぎ信号はガウス分布に従う事が知られている。しかし、システムが発振（リミットサイクル振動）の臨界点に近ずくと揺らぎは増大しガウス分布からはずれてくる。原子炉の動力学方程式は中性子の拡散、熱の拡散、強制循環された流体の運動が空間的に非均質な媒質中を運動する状況等を記述すべく構成されている。しかし、臨界点近傍では、これらの方程式を逓減摂動法等で簡単化した複素ギンスブルグ・ランダウ方程式に基付き考察する事が許されよう。しかし、揺らぎが重要であるので揺動力を付け加ておく：

$$dA/dt = i\omega_0 + gA - hA|A|^2 + F(t) \qquad (1)$$

ここで、解析の簡単化のため g, h は実数であると仮定する。また、揺動力は複素数ガウス白色：$\langle F(t)\rangle = 0$ 及び $\langle F(t)F^*(0)\rangle = 2D\delta(t)$　　(2)

として、実験データを用いたシステム同定（パラメータの推定）を実行する。

3。実験データの解析

解析に利用したデータは NSRR (Nuclear Safety Reactor) において制御系へのゲイン調整して発振の様子の変化を調べた場合の中性子の揺らぎ信号である。カオス解析で知られているタケンスの埋め込みの方法を遅延座標を用いて実行し、相互情報量が最小になる時間遅れを最適パラメータとして採用して２次元の確率密度関数を得た。その結果、定常状態の確率密度関数を

$$P(X,Y) = P_0 \exp\{-2V(X,Y)/\tilde{D}\} \tag{3}$$

と表せば、ポテンシャル関数 $V(X,Y)$ として、リミットサイクル振動の発生が明確な場合には次のようなポテンシャル；

$$V(X,Y) = -(g/2)(X^2+Y^2) + (h/4)(X^2+Y^2)^2 \tag{4}$$

が得られた。一方、制御系へのゲインがもっと小さく、リミットサイクル振動のの先行振動と見なせる状態の場合のポテンシャルは

$$V(X,Y) = -(a/2)X^2 + (b/2)Y^2 + (h/4)(X^2+Y^2)^2 \tag{5}$$

と表現される事がわかった。また、さらにゲインが小さな状態では極小点が三個存在するポテンシャルで表現される事がわかった。

4。非線形モデルとの比較

臨界点近傍の近似理論から得られた複素標準型の方程式(1)からは臨界点以下では２次元ガウス分布、臨界点より上では(4)式のシリンダー状の分布関数が得られるが(5)式の出現理由は見つからない。ガウス白色雑音がパラメータ励振型で影響しているとしても(5)のようなポテンシャル得られない。従って、白色雑音とする現象の粗視化がこの場合には妥当でなく、非白色雑音の存在（言い替えると、状態変数が完全系を構成していない）がこのような結果をもたらしたと考えられる。(5)のようなポテンシャルを得る為には(1)式に対称性を破る $g'A^*$ をつけ加える必要がある。可能性としては、何らかの非定常性や原子炉内の空間結合の存在等が考えられるがこらは今後の検討課題である。

この結果を原因究明でなく、システムの安定性指標の探索の観点から考えると、ゲインの小さな場合に見いだされた２次元のダフィング振動子型のポテンシャルは発振の先行状態とみなす事が出来よう。このポテンシャルをパタン認識するナイーブな考えから一歩進んで、粗視化した統計量を提案しよう。その候補としては振幅分布のq次モーメント（または、キュムラント）が考えられる。(1)のモデルの場合これは解析的に求まる[5]：

$$\langle r^q\rangle = (2b)^{-q/4}\Gamma(q/2+1)D_{-(q/2+1)}(a/\sqrt{2b}) \,/\, D_{-1}(a/\sqrt{2b}) \tag{6}$$

ここで、$a = g/D$, $b = h/2D$, $D_\nu(x)$ はパラボリック・シリンダー関数、$\Gamma(z)$は ガンマ関数である。この一般化され、規格化されたモメントをqの関数として表現するとノイズによる時系列の汚れの影響をある程度解消でき、また、通常の運転時のガウス分布からのずれを容易に検出可能である。さらに、qによる変化と実効ポテンシャルの対応も付けられる。モーメントの絶対値を知る為に振幅の２次モーメント $\langle r^2\rangle$ について考えてみよう。この物理量は２次元の位相空間(r,θ)での運動の場合、富田ら[4]によって非平衡開放を特徴付ける量として提案された「揺動の非可逆循環」A と関係付けられる：

$$A = (1/2)\langle r^2 \dot{\theta}\rangle \tag{7}$$

振幅と位相の運動が独立として良い場合、$\langle\theta\rangle=\omega_0$ と評価出来、モデル(1)から循環は次のように評価できる：

$$A=\omega_0 g/h/2+(\omega_0/2)(2D^*/h\pi)^{1/2}\exp(-g^2/2hD^*)/(1+\mathrm{erf}(g/(2hD^*)^{1/2})) \quad (8)$$

ここで、$D^*=D/\omega_0$, $\mathrm{erf}(x)=(2/\pi^{1/2})\int_0^x\exp(-t^2)dt$。この表式では、転移点より上の場合が与えられているが平均の循環とそのまわりの揺らぎの循環が明確に分離されている事に注意されたい。パラメータ g の関数として、循環の値の変化の様子の理論曲線と実験データから計算した値を比較すると、実験では一度小さくなってから再び増加する傾向みられる。類似の現象として、ヤリイカの発振の臨界点の接近の途中で振動のピークの強度が一度低くなってから再び増大するという結果が報告されており。こらは空間結合と関係しする事が示唆されている。

5。情報の微分幾何

規格化した確率分布関数(3)を(4)のポテンシャルの場合に極座標で表現すると

$$P(r)=\exp(ar^2-br^4-\psi(\phi_1,\phi_2)) \quad (9)$$

が得られる。これは、指数関数族であり次のようなポテンシャル関数を定義できる

$$\psi(\phi_1,\phi_2)=-(1/2)\log\phi_2+(1/4)\phi_1{}^2\phi_2{}^{-1}+\log(1+\mathrm{erf}(\phi_1/2\sqrt{\phi_2})) \quad (10)$$

ここで、２個のパラメータ $\phi=(\phi_1,\phi_2)$ は

$$\phi_1=g/D \text{ 及び } \phi_2=h/2D \quad (11)$$

で与えられる。Fischer 情報行列は $g_{ij}=\partial_i\partial_j\psi(\phi_1,\phi_2)$ から計算でき、双対座標 $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ は次のようになる：

$$\eta_1=\partial_1\psi=\langle r^2\rangle=(\phi_1/2\phi_2)+(1/\pi\phi_2)^{1/2}\exp(-\phi_1{}^2/4\phi_2)/(1+\mathrm{erf}(\phi_1/2\sqrt{\phi_2}))$$

$$\eta_2=\partial_2\psi=\langle r^4\rangle=(1+\phi_1{}^2/2\phi_2)/2\phi_2+(\phi_1/2\phi_2)(1/\pi\phi_2)^{1/2}\exp(-\phi_1{}^2/4\phi_2)/(1+\mathrm{erf}(\phi_1/2\sqrt{\phi_2})) \quad (12)$$

従って、勾配方程式

$$(d\phi/dt)=-g_{ij}\partial_j\psi \quad (13)$$

はルジャンドル変換により線形化可能となり、可積分かつ流れはポテンシャルの最小点に指数関数的に収束する。これは、モーメントの情報を用いてパラメータを推定する逆問題が解けることを意味する。このように、逆問題が解けるようになったのは現象を粗視化し、雑音源をガウス白色雑音であるとみなしで現実の非白色性をポテンシャルに押しつけた結果である。このような観点から、もっと広いクラスの非線形確率微分方程式[6]の逆問題さらには非線形可積分系を見直す事は興味深い。

参考文献

[1]甘利俊一,長岡浩司「情報の微分幾何の方法」（岩波）１９９３
[2]甘利俊一他「情報空間」数理科学 366（サイエンス社）１９９３
[3]S.Amari: Differential Geometrical Methods in Statistics, Springer Lecture Note in Statistics, 28, 1985.
[4]K.Tomita and H. Tomita, Progr. Theor. Phys. 51 (1974) 1731.
[5]H.Konno, K.Hayashi and Y.Shinohara, Ann. Nucl. Energy 21 (1994)印刷中
[6]H.Konno, (unpublished)